abbiamo parlato di come si possano tradurre in
linguaggio delle semplici regole matematiche;
come però il Lemma di Zorn si possa rendere in prosa
è una domanda che mi preoccupa già da tempo

Werner Herzog, *La conquista dell'inutile*

INTRODIVAGAZIONE

si potrebbe stilare una lista di creature secondo un criterio
di interesse decrescente verso l'ambiente circostante.
si comincerebbe con l'ameba per finire con il matematico

Lytton Strachey

Quando dico che nella vita mi occupo di matematica la gente, salvo rare eccezioni, mi guarda come se venissi da un altro pianeta e poi si sente in obbligo di aggiungere: "Devi avere un gran testa! Io della matematica non ho mai capito niente..."
Il matematico dà l'idea di una persona dalle strane abitudini, di un essere un po' eccentrico che ama perdere tempo a fare calcoli, che ha sempre la testa tra le nuvole e che, alla fin fine, non è molto utile visto che non riesce ad affrontare problemi pratici.

A supporto di questa visione si raccontano varie storielle in ambiente universitario che hanno come protagonisti un matematico, un fisico ed un ingegnere. Questi formano una triade proprio come l'italiano, il tedesco ed il francese nelle barzellette di quart'ordine che andavano di moda qualche decennio fa. In queste storielle l'ingegnere è l'uomo con senso pratico che salta subito alle conclusioni, diametralmente opposto al matematico, con senso pratico pari a zero, ma capacità elucubrative a volte al di là dell'utile. Il fisico rappresenta un po' la mediazione, ma *in medio* non sempre *stat virtus*: il fisico serve soprattutto a formare una triade, visto che tre è il numero perfetto, anche nelle storielle. Qui ne riporto una, ma nel corso delle prossime divagazioni ci sarà modo di raccontarne altre.

> Un matematico, un fisico ed un ingegnere vengono rinchiusi in tre stanze uguali. Al centro di ogni stanza c'è una SCATOLETTA DI TONNO ben sigillata. Dopo una giornata intera le tre stanze vengono riaperte. L'ingegnere è riuscito ad aprire la scatoletta usando i principi della meccanica ed ha comodamente mangiato il tonno. Il fisico ha mangiato il tonno, ma ha la bocca sanguinante perché ha aperto la scatoletta a morsi. Il matematico, invece, non si è mosso nelle ultime ventiquattrore e con la scatoletta in mano sta pensando: "Ma supponiamo per assurdo che la scatoletta sia aperta..."

Cinica nota en passant: se il matematico vuole mangiare il tonno e, quindi, dimostrare come tesi che la scatoletta è aperta, non può assumere per ipotesi che lo sia! Evidentemente è una storiella raccontata da persone che hanno qualche difficoltà con il ragionamento per assurdo, del quale avrete un assaggio nella Terza Divagazione.

Comunque un fondo di verità anche in questa storiella c'è. I matematici hanno davvero difficoltà ad affrontare problemi pratici perché la loro testa è spesso altrove, ma questa vigile assenza è più presupposto che conseguenza della matematica stessa. Mi spiego meglio.

Siamo probabilmente d'accordo tutti e tutte che fare matematica senza astrazione sia impossibile. Molta gente, anzi, ritiene l'eccessiva astrazione una delle cause del proprio cattivo rapporto con la matematica.

Eppure la capacità di astrarre è una caratteristica della specie umana. Anzi, secondo alcuni studiosi, ne è proprio la caratteristica fondamentale:[1] siamo tutt* in grado di concepire concetti astratti come la rabbia, l'amore o cose di non acclarata esistenza quali unicorni o cinghiali con le ali. Da dove derivano allora le difficoltà nell'affrontare ragionamenti che tirino in ballo triangoli o numeri primi?

Torniamo al nostro amico alato. Nel momento stesso in cui avete letto 'cinghiale con le ali' immagino vi si sia formata in mente una figura simile a quella che troverete in fondo a questa Introdivagazione. E se vi chiedessi quanto fa un cinghiale con due ali più un cinghiale con tre ali?

---

[1] cfr. [**Devlin, 2002**], pag. 148 e segg.

Le risposte potrebbero variare da un cinghiale con cinque ali a due cinghiali con due ali e mezzo. Sarebbero tutte valide, ma sarebbe altrettanto valida la risposta un cane a quattro zampe finché una legge in base a cui sommare ali, setole e zampe non viene specificata. Perché il cinghiale con le ali è sì un concetto pensabile o riproducibile solo tramite astrazione, ma non possiede automaticamente una struttura matematica. Almeno per ora...

Se, ad esempio, il cinghiale con due ali lo interpretassimo come la coppia ordinata $(1;2)$ ed il cinghiale con tre ali come la coppia ordinata $(1;3)$ e la somma la facessimo componente per componente, allora otterremmo come risultato $(1;2)+(1;3) = (1+1;2+3) = (2;5)$, ovvero due cinghiali che in tutto hanno cinque ali.

Cosa che sapevamo già!

L'abilità (o la deformazione) del matematico risiede proprio nell'applicare l'astrazione a particolari oggetti che lui stesso o altri hanno dotato di struttura matematica, e le cui proprietà sono state faticosamente ottenute attraverso teoremi. E dato il loro costante uso e la familiarità che ne deriva, questi particolari concetti astratti e le relazioni che tra loro intercorrono diventano agli occhi del matematico cose reali tanto quanto gli oggetti ordinari dell'esperienza.[2]

Già lo sento, state pensando: "E' il solito discorso... Questo vuole dirci che la matematica è frutto di astrazione, che l'astrazione è un'abilità come tutte le altre e che, sotto sotto, siamo noi gli stupidi che ci perdiamo di fronte anche ai calcoli più banali." Assolutamente no. Sarebbe come affermare che suonare uno strumento musicale è un'abilità come tutte le altre e che quindi sono io lo stupido perché dalla chitarra non riesco a fare uscire neanche un do.

Per fare musica ci vogliono abilità o capacità specifiche. Così come per fare matematica. Queste due arti del quadrivio sono, però, percepite differentemente. La musica tutt* la ascoltano, tutt* hanno cantanti, autori o generi preferiti anche senza essere critici esperti o esecutori sopraffini. Molte persone, invece, la matematica non sono proprio abituate ad ascoltarla, perché troppo spaventate dal suo grado di astrazione o troppo impaurite dai ricordi adolescenziali.

[2]cfr. W.K. Clifford (1845-1879) in [**Wells, 2002**], pag. 94

Ma, non per questo, non sarebbero in grado di farlo o non ne avrebbero desiderio.

Se non avessi passato serate a raccontar matematica a ragazzi e ragazze frequentanti facoltà economiche o umanistiche, se loro non mi avessero spinto ad autoformarmi per inserire queste mie conoscenze in un quadro più ampio, queste divagazioni non sarebbero mai nate. Divagazioni e non divulgazioni. Perché non c'è un *vulgus* da rendere edotto *ex cathedra*, ma una scienza umana, la matematica, fatta di errori e di persone, di scoperte e non di verità assolute, una scienza da far vagare nelle strade e nelle piazze, agli aperitivi e alle cene, in rete e nei corridoi delle università.

Forse dopo aver letto le divagazioni qualcuno imparerà a conoscere la matematica un po' di più, a saperla riconoscere qua e là e ad apprezzarla per quella che è.

Ma ora basta metadivagare. Divaghiamo seriamente!



PRIMA DIVAGAZIONE

La scienza delle pecore gialle solo da un lato

il rispetto che deriva da conoscenza è di sinistra,
quello che deriva da timore è di destra

Cosimo Greco

L'aura che ammanta la matematica sa di rinuncia definitiva e di incubi adolescenziali, di ammirazione e di rispetto, spesso solo apparente perché nasconde timore e non conoscenza.

Ma, dopo tutto, che cosa è 'sta matematica?

L'etimologia non ci aiuta molto. La parola 'matematica' deriva dal vocabolo greco μαθηματικά, che ha al suo interno la radice del verbo μανθάνω, *io apprendo*. Il suo significato è *cose che sono oggetto di apprendimento*, ma, a dire la verità, anche l'astronomia, la letteratura, le 'leggi' del mercato, il funzionamento dei lavandini o qualsiasi altra cosa possono essere oggetto di apprendimento.

Proviamo allora a sentire cosa si dice in giro. Per la maggior parte della gente la matematica è lo studio dei numeri. Per chiarire questo concetto, qualcuno potrebbe aggiungere che essa è una scienza messa al servizio di altre discipline.

In effetti la 'regina delle scienze' serve a fare complicati calcoli che poi vengono usati in fisica, chimica, ingegneria, medicina, serve per fare scommesse, giocare al superenalotto e alla roulette o per capire se il

prezzo delle pere è aumentato. Ma questo non implica che da sola essa serva a poco.

Bene. Si fa per dire. Nelle prime due parti di questa divagazione introduttiva proverò a spiegare cosa c'è di sbagliato e di riduttivo nel considerare la matematica una scienza che ha a che fare solo con i numeri e la ricerca matematica un qualcosa che ha senso solo se applicata. Cercherò poi di fornire una risposta alla domanda di partenza. Anzi, più di una... ma di tenore un po' diverso.

Numeri, soltanto numeri

La fine dell'ultima ora si avvicina, la campanella sta per suonare, la prof di matematica ha già finito le interrogazioni, i ragazzi e le ragazze stanno mettendo a posto gli zaini ed ecco che dalla terzultima fila si alza una manina e si sente una vocina che chiede: "Scusi, professoressa, ma domani facciamo matematica o geometria?"

Non occorre esser stati o esser insegnanti per assistere ad una scena del genere. Chissà quante volte ad alzare la manina siete stati proprio voi o il vostro compagno di banco.

E' strano pensarlo, ma questa innocente domanda nasconde un problema di fondo che spesso riscontro quando l'argomento matematica spunta fuori nel bel mezzo di una discussione a cena, in casa o per strada: la confusione lessicale tra matematica ed aritmetica, il settore della matematica che spiega come eseguire operazioni e calcoli tra numeri. Non a caso 'aritmetica' deriva dal verbo greco ἀριθμέω, *io conto*.

Confusione che nel corso degli anni si estende all'algebra, il settore della matematica che 'completa' l'aritmetica aggiungendo ai numeri le lettere. L'algebra (dall'arabo *al-găbr*, *completamento*) si occupa, infatti, del calcolo letterale e della soluzione di equazioni.

Questa sineddoche al contrario (il tutto per la parte!) porta ad una rigida identificazione matematica-aritmetica-algebra, da cui ogni altro settore della matematica risulta escluso. Come fare ad uscirne?

Mi capita a volte in classe di fare la classica domanda "Cosa è per voi la matematica?" e, dopo aver udito la classica risposta "Lo studio dei numeri!", riesco a convincere l'uditorio che in matematica si

Esercizio	Regole o proprietà usate
$[(4-2)\times 2^3] : 2^4 + 5 \times 3 =$ $= [2 \times 2^3] : 2^4 + 5 \times 3 =$ $= 2^4 : 2^4 + 5 \times 3 =$ $= 1 + 5 \times 3 =$ $= 1 + 15 =$ $= 16$	Regole delle parentesi, Regole di precedenza tra operazioni; Proprietà delle potenze
In un triangolo isoscele il perimetro misura 96cm e la base 16cm. Determinare l'ampiezza degli altri lati. Dati : $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 96\text{cm}$ $\overline{AB} = 16\text{cm}$ *[base]* $\overline{BC} = \overline{AC}$ *[lati obliqui]* $\overline{AC} = (96\text{cm} - 16\text{cm})/2 = 40\text{cm}$ $\overline{AC} = \overline{BC} = 40\text{cm}$	Calcolo aritmetico Proprietà dei triangoli *[guarda il terzo dato]*

Figura 1. Espressioni e problemi

studiano anche le figure, la probabilità, le equazioni e tante altre cose. A questo punto spesso chiedo: "E cosa accomuna tutti questi settori?"

Ovviamente la risposta che ottengo con più frequenza è: "I numeri!"

Per fortuna, dopo aver fatto esempi tipo quelli riportati in *Figura* 1 e aver posto la domanda in altro modo, qualcuno nota che ciascun settore della matematica è caratterizzato da proprie regole, proprietà o teoremi che vanno usati al momento giusto e al posto giusto per risolvere gli esercizi. E che gli enunciati di queste proprietà, di questi teoremi sono espressi in un linguaggio asciutto e rigoroso.

Fin qui tutto bene. Dopo un po' di riflessione possiamo convenire tutti e tutte che linguaggio tecnico e modo di ragionare per ottenere la soluzione, tra le cose in comune a tutti i settori della matematica, rivestono un ruolo ben più importante dei numeri che, difatti, nei problemi delle superiori cominciano a latitare.

Perché, però, la mia non rimanga una vittoria di Pirro è necessario far osservare che sono le verifiche e le dimostrazioni, anche solo intuitive

o grafiche, che spiegano perché il dato teorema o la data proprietà vale sotto certe premesse e, magari, non vale se le premesse cambiano. Sono queste che fungono da anello di collegamento tra enunciazione di una regola e sua applicazione, che riempiono di significato quei termini tecnici altrimenti così inutilmente rigorosi.

Senza le dimostrazioni teoremi, proprietà e regole vengono immagazzinate come un elenco ordinato di suoni senza significato da riprodurre quando richiesto, sono come delle cantilene... Pensate quali traumi infantili potrebbe sviluppare un bambino se i propri genitori gli cantassero a mo' di ninna-nanna

Il Teorema di Pitagora afferma che,
in un triangolo rettangolo,
il quadrato costruito sopra l'ipotenusa è
equivalente alla somma dei quadrati
costruiti sopra i cateti

La ricerca non serve

Linguaggio, regole e dimostrazioni. Nel paragrafo precedente ho affermato che queste sono cose che accomunano i vari settori della matematica. Possiamo allora concludere che in matematica tutto è stabilito e prefissato da regole precise e indiscutibili? Che il lavoro del matematico consiste nel dedurre da regole certe tutte le conseguenze possibili?

Attenzione, basare i propri risultati su un sistema deduttivo non vuol dire esaurirsi in esso. Nel film *Non ho tempo* (1972) di Ansano Giannarelli il rivoluzionario e matematico francese Évariste Galois (1811-1832), durante una lezione pubblica aperta anche ad operai e uomini del popolo, afferma: "Una teoria nuova è la ricerca della verità più che la sua espressione. Se la si potesse dedurre regolarmente dalle già non sarebbe più nuova [...] La matematica non è una serie di deduzioni."

Fissare attraverso definizioni rigorose e dimostrazioni non contraddittorie una nuova scoperta è una operazione successiva alla scoperta

stessa. Il succo della matematica sta nel mettere in discussione le regole già esistenti, nel tentativo di ampliarne il raggio d'azione o di aprire nuovi orizzonti di ricerca. E più importante del risultato sono i dubbi che si sollevano nella ricerca di esso, il metodo con cui lo si cerca e, come vedremo fra qualche divagazione, persino gli errori che si commettono nella speranza di ottenerlo.

Proprio perché non è una sterile e fredda serie di implicazioni, la matematica non è una disciplina autoreferenziale: nel corso della storia scoperte fondamentali sono state stimolate dalla risoluzione di problemi concreti e, viceversa, in molte discipline negli ultimi due secoli sono stati usati approcci di tipo logico o matematico.[1]

Ma se mi chiedono "A cosa serve quello che fai?", io, che mi occupo di ricerca matematica per mestiere, diletto o inconscia volontà di appartenere al precariato cognitivo, rispondo così: "Questa non è la domanda giusta. La ricerca matematica ha senso anche in sé e non esclusivamente se applicata."

Infatti, nel momento in cui va alla ricerca di teorie e teoremi nuovi, il matematico può partire da problemi concreti, ma non deve vincolare all'utilità il proprio risultato e deve sganciarsi dalla produzione di merci e segni.

Il verbo 'servire' sottende sempre una dimensione pratica, una mercificazione della scoperta ed una sua valutazione sulla scala del profitto. La stessa indipendenza nella ricerca di base deve essere garantita a coloro che producono sapere vivo dentro o fuori gli ambienti accademici attraverso finanziamenti non legati al conseguimento di un ritorno economico.

Proprio quello che da anni accade in Italia...

[1]Due esempi di scambio. Isaac Newton (1643-1727) fu spinto dallo studio del moto dei corpi e delle sue leggi a sviluppare il calcolo infinitesimale, John Nash (1928), la famosa *beautiful mind*, ha vinto il Nobel nel 1994 in economia grazie ai suoi lavori sulla teoria dei giochi, un settore della matematica sviluppatosi solo recentemente.

Che cosa è la matematica?

Un matematico, un fisico ed un ingegnere stanno attraversando in treno una landa scozzese. In un campo scorgono otto PECORE. L'ingegnere, guardandole, dice: "Dal fatto che queste pecore sono tutte di color nero potremmo dedurre che le pecore della Scozia sono nere." Il fisico osserva: "In realtà, possiamo dedurre esclusivamente che in Scozia ci sono otto pecore di color nero." Il matematico chiosa: "Vi sbagliate entrambi. Possiamo solo dedurre che in Scozia esistono almeno otto pecore e che la parte di queste otto pecore che a noi è visibile è di color nero."

Questa storiella, simile ad una riportata nel libello ironico *Bluff your way in math* di Robert Ainsley, vede come protagonista la triade già incontrata nell'Introdivagazione ed è considerata pro matematico dai matematici. Ma dubito che altri o altre la pensino allo stesso modo. Appare scontato rimanere basit* di fronte alla razionalità eccessiva e controproducente del matematico: dove mai si son viste pecore nere da un lato e gialle dall'altro?

Beh, vi posso assicurare che siffatti animali non belano di certo nelle lande scozzesi, ma metaforicamente popolano la storia ed il mondo della matematica. Vediamo perché.

Il matematico di fronte ad un oggetto che conosce solo parzialmente non può dare per assodate alcune proprietà. Deve, invece, provare a capire se queste proprietà si possono inferire da altre proprietà che lui già conosce e, in caso negativo, vagliare anche soluzioni alternative. In sostanza, se passando col treno vede una pecora nera, prima di affermare che la pecora è interamente nera deve scender giù e controllare di che colore sia la parte che dal treno non ha scorto. E questa parte spesso è color giallo ocra o canarino, ha ciuffi giallo limone o paglierino o macchie color oro, senape e pecorino.

La storiella e i disegni riportati in *Figura* 2 spesso rimangono nella mente di studenti e studentesse più di tante parole ed è per questo che in modo semiserio dico che la matematica è la scienza delle pecore gialle solo da un lato.

Alla domanda che dà il titolo a questo paragrafo e che ci accompagna sopita sin dall'inizio di questa divagazione è, però, importante dare

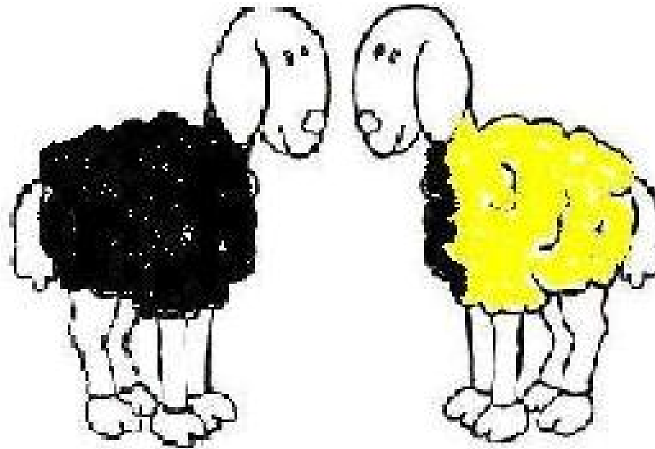


Figura 2. Una pecora particolare

anche una risposta che vada bene agli addetti ai lavori e che descriva meglio la struttura intrinseca della matematica stessa.

A me piace particolarmente la risposta fornita dal logico matematico e scrittore di saggi divulgativi Keith Devlin, che definisce la matematica come la scienza dei modelli.[2]

La parola 'modello' è sì un termine tecnico, ma il significato che ha in matematica non è dissimile da quello che ha in sartoria. Possiamo, infatti, pensare al matematico come ad un sarto che, di fronte a nuove necessità e nuovi problemi, prova a riadattare i modelli già esistenti e, se nessun precedente modello va bene, prova a crearne uno nuovo, magari utilizzando tessuti e tecniche alternative, ma senza esser certo di raggiungere un risultato.

E' fondamentale, però, che questo sarto sia universale e guardi ai problemi che si è posto ed ai modelli già esistenti nel loro complesso e non singolarmente, ossia pensi il sapere matematico (e non solo) come un tutt'uno e non come ad un insieme non comunicante di settori. Sono anzi convinto che l'importanza di un modello matematico è legata alla capacità di creare analogie tra settori diversi.

Un esempio familiare un po' a tutt* di modello riuscito è costituito dalla geometria analitica che ormai da cinque secoli fornisce attraverso

[2]cfr. [**Devlin, 2002**], pag. 95

coordinate e sistemi di riferimento un ponte tra la geometria e l'algebra percorribile in entrambi i sensi di marcia.

Cosa vi aspetta

Analogia, ecco la parola che mancava per spiegare ciò che accomuna tutti i settori della matematica. Non a caso il fisico e matematico Jules Henri Poincaré (1854-1912) affermava che la matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse.[3]

E proprio un racconto che metta in luce le analogie tra settori diversi e scovi un po' di pecore gialle solo da un lato è quello che vi attende nelle prossime divagazioni.

Buona lettura.

[3]cfr. *Il ruolo delle analogie* in [**Wells, 2002**], pag. 164

SECONDA DIVAGAZIONE

Due più due non fa sempre quattro

> si potrebbero allevare diversi bambini in diversi sistemi di pensiero, far credere ad alcuni che due più due non fanno quattro o che la luna è un formaggio, poi metterli tutti insieme quando avessero venti o venticinque anni; si avrebbero allora discussioni violente che varrebbero assai più delle conferenze e dei sermoni per i quali si spende tanto denaro
>
> M. Foucault, *Sorvegliare e punire*

"Facciamo la conta per chi va in porta... Da Chiara verso Francesco, bim bum bam... Allora, io ho buttato zero, voi avete buttato due... uno, due, tre, quattro... In porta, Chiara, ci vai te!"

"Ma perché? Due più due fa quattro, quindi tocca al quarto, io ero la prima..."

"Sì, ma noi siamo in tre. Così se sei la prima sei anche la quarta!"

"Ma se sono prima e quarta, allora... allora due più due fa uno e uno è uguale a quattro! Non è possibile. Ale, tu mi vuoi fregare. In porta non ci vado!"

E adesso come facciamo a spiegare a Chiara che in alcuni casi uno e quattro sono proprio uguali?

Aritmetica delle mele e aritmetica dell'orologio

E' opinione comune che la matematica non sia un'opinione. Con questa massima dal sapore Zarathustriano non mi costa nulla esser d'accordo dato che *ex post* tutto può essere non opinabile. Quando, però, da essa si fa discendere l'affermazione che in matematica i risultati sono indiscutibili perché due più due fa sempre quattro, io storco un po' il naso. Ed ora anche la piccola Chiara...

Riflettiamo un attimo. Se io compro sei mele e poi ne compro altre sette, in totale ho comprato tredici mele. Se una delle sei gatte del mio vicino sforna una cucciolata di sette gattini, il mio vicino si ritroverà con tredici gatti in casa. Perché, direte voi, sei più sette fa sempre tredici indipendentemente da cosa stiamo sommando.

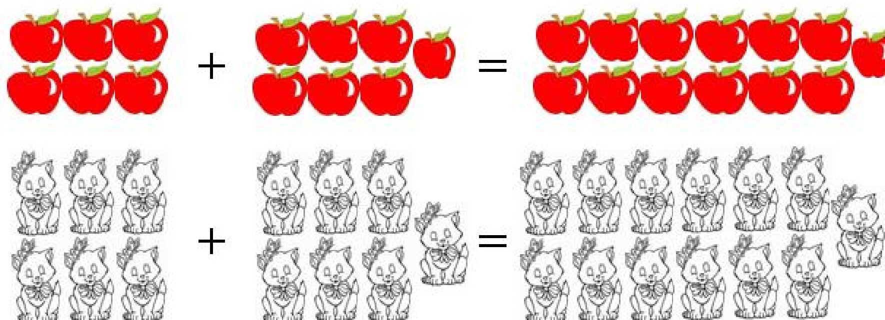
Eppure la seguente frase lascerebbe perplesso chiunque: "La lancetta piccola del mio orologio segna le ore 6 e tra sette ore segnerà le ore 13."

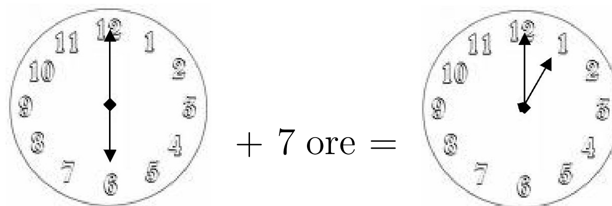
Gli orologi con lancette hanno un quadrante che indica in ordine i numeri da 1 a 12. Swatch anni ottanta a parte. Quindi, se ora la lancetta piccola segna il numero 6, tra sette ore segnerà il numero 1.

Ma allora, quando si parla di orologi con lancette, $6 + 7 = 1$!

Numeri, calcoli, somme. Stiamo parlando di aritmetica, che per tutt* rappresenta il battesimo della matematica e per molt* l'unico sacramento di questa strana religione mascherata.

Ma che differenza c'è tra sommare mele e sommare ore?





Il problema sembra chiaro. Nel contare le mele usiamo i numeri naturali, cioé

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

e li possiamo usare tutti perché non esiste un numero massimo di mele oltre cui non è possibile andare. L'aritmetica delle mele in linguaggio tecnico si chiama aritmetica dei numeri naturali.

Dodici mele, in particolare, rimangono tali e non si dileguano nel nulla a meno che qualcuno non le mangi.

Nell'orologio, invece, il contatore delle ore va azzerato proprio dopo le 12. In matematica si parla in questo caso di aritmetica modulare.

L'aritmetica dell'orologio a lancette è un'aritmetica modulo 12. In dodici ore la lancetta piccola fa un giro completo del quadrante e torna per la prima volta nella sua posizione di partenza. Come se zero ore fossero passate. Perciò scriviamo

$$12 = 0 \pmod{12},$$

che si legge 12 uguale (o congruo) 0 *modulo* 12.

Nel nostro modo di misurare il tempo si ritrovano anche esempi di aritmetica modulo 60 [1] (minuti primi e minuti secondi), modulo 24 (ore del giorno o di un orologio digitale) e modulo 30 (mese finanziario).

Ma anche Ale, Chiara e Francesco nel tocco di inizio divagazione ragionano secondo un'aritmetica modulare. Analizziamo più da vicino la situazione e scopriamo quale ne è il modulo.

La conta va da Chiara verso Francesco, Ale è il terzo. Un po' di esperienza ci insegna che se la somma fa 1, 4 o 7 a perdere è Chiara, se la somma fa 2, 5 o 8 a perdere è Francesco, se la somma fa 3, 6 o 9 a perdere è Ale. 1, 2 e 3 danno dunque risultati diversi, gli altri numeri

[1] Probabilmente questo è un retaggio della numerazione posizionale in base 60 introdotta dai babilonesi più di 4000 anni fa (cfr. [**Boyer, 2000**], pagg. 31-32)

no. In un certo senso valgono queste strane uguaglianze: $1 = 4 = 7$, $2 = 5 = 8$ e $3 = 6 = 9$.

La prima è proprio l'uguaglianza che fa arrabbiare Chiara.

Se dividiamo per 3 i numeri da 0 a 9 ed andiamo a considerare il resto della divisione, scopriamo che i numeri che fanno perdere Chiara (1, 4 e 7) danno come resto 1, quelli che fanno perdere Francesco (2, 5 e 8) danno come resto 2 e quelli che fanno perdere Ale (3, 6 e 9) danno come resto 0.

E 0 diviso 3? Dà come resto 0, proprio come 3, 6 e 9! Visto che 1, 2 e 3 danno risultati diversi e $0 = 3$, vuol dire che ci troviamo di fronte ad una aritmetica modulo 3: ogni volta che si arriva a tre si ricomincia e tre è il numero più piccolo per cui ciò avviene.

Una curiosità. Se Ale, Chiara e Francesco gettassero tutt* zero, i tre probabilmente rifarebbero la conta. Ma a perdere dovrebbe essere Ale perché $0 = 3 \pmod 3$.

Ma alla fine quanto fa due più due in questa aritmetica modulo 3? Abbiamo visto che a perdere è Chiara ed, infatti,

$$2 + 2 \;=\; 4 \;=\; 3 + 1 \;=\; 0 + 1 \;=\; 1 \pmod 3$$

Quindi, due più due non fa quattro in aritmetica modulo 3, anche se la luna non è un formaggio...

Due più uno fa invece zero. Come dire, che ne so, che un partito che ha 41 deputati e 27 senatori si allea con altri due partiti che insieme hanno 31 deputati e tutti insieme i tre partiti, ora finalmente riuniti sotto un meraviglioso simbolo unitario, raggiungono solo il 3% alle nuove elezioni politiche e restano tutti allegramente fuori dal Parlamento!

Cose davvero improbabili!

Giochi di prestigio

"Vabbé, alla fine basta capire il trucco. Se contiamo modulo 3, ogni volta che arriviamo a tre dobbiamo ripartire da zero, se contiamo modulo 12, ogni volta che arriviamo a dodici dobbiamo ripartire da zero e così via..."

Trucco forse non è la parola indicata, ma fa capire qualcosa che a prima vista sfugge. Non c'è un modo unico e naturale di definire l'operazione somma e noi siamo abituati sin da tenera età ad usarne diversi: se contiamo mele o gatti ne usiamo uno, se guardiamo le ore dell'orologio ne usiamo un altro, se facciamo la conta per andare in porta un altro ancora.

La pecora due più due non è tutta nera, ma la sua parte nascosta ha sì e no qualche macchia gialla. La somma di due numeri può dare un risultato diverso se si sta utilizzando un'aritmetica modulare, ma basta saperne il modulo e ricordarsi di azzerare mentalmente il contatore per ottenere il risultato corretto.

Sono convinto che ciascuno di noi nel fare i conti in un'aritmetica modulare riscontra pressocché la stessa difficoltà rilevata nell'eseguire calcoli nell'aritmetica dei naturali.

Certo quando i numeri diventano troppo grandi o le operazioni troppo complesse, abbiamo bisogno di calcolatrici o computer...

"Eh sì, Loro sicuramente non sbagliano mai!"

Proprio qui vi volevo... un'altra pecorella indesiderata, allontanata dalla porta, sta per rientrare dalla finestra!

Intelligenza artificiosa

Quando mi vedevano in mano una calcolatrice i cugini venivano da me per insegnarmi dei giochetti. Alcuni stupidi, come utilizzare il tasto 'M' per far comparire sul display, orientato nel verso opposto, prima 'BOBBI' e poi 'SOLO'. Altri più interessanti, come raggiungere 99999999, il numero più grande che potesse essere visualizzato, a forza di sommare sempre 99.

Uno mi affascinava particolarmente. Consisteva nel digitare '1', eseguire $\div 2$ e poi si digitare il tasto '=' più volte. Gli zeri dopo la virgola aumentavano velocemente, al ventiquattresimo '=' compariva sul display '0.0000001'. Il risultato non cambiava più anche se continuavo a premere il tasto '='. Il gioco finiva presto, ma ciò che mi affascinava era l'evidente sbaglio che commetteva la mia mitica calcolatrice Voesa trovata dentro il fustino del detersivo.

Se prendo un numero maggiore di zero e lo divido per due ottengo la metà del numero di partenza, se è rimasto un pezzo di torta anche minuscolo lo posso comunque dividere in due pezzi uguali più piccoli. Per la mia Voesa, invece, 0.0000001 diviso due faceva sempre 0.0000001 e non 0.00000005, come se dividere in due il pezzo piccolissimo di torta produceva due pezzi uguali a quello di partenza!

Sia ben chiaro, la mia calcolatrice non credeva che i pezzi di torta seppur minuscoli si potessero miracolosamente moltiplicare, ma aveva un display che poteva visualizzare numeri con al massimo otto cifre tra prima e dopo la virgola e 0.00000005 ne aveva nove, una prima e otto dopo. Era perciò costretta ad approssimare 0.00000005 con il numero di otto cifre (tra prima e dopo la virgola) più vicino: 0.0000001, proprio l'ultimo numero che avrebbe dovuto dimezzare. E così andava in loop.

A causa del suo display limitato, la mia Voesa poteva utilizzare per i calcoli solo un'aritmetica finita. Un'aritmetica in cui c'è un numero più grande di tutti, in cui i numeri con la virgola hanno un numero massimo di cifre decimali ed in cui per determinare l'ultima di queste cifre decimali è necessario effettuare approssimazioni.

Ma della stessa patologia soffrono, anche se con diverse forme di gravità, ancor oggi tutte le macchine che devono effettuare calcoli, dalle mini calcolatrici nascoste nei nostri cellulari ai più moderni e sofisticati computer in circolazione.

E l'aritmetica finita che tutte queste macchine usano è così particolare che in essa le operazioni che noi conosciamo (somma, moltiplicazione, elevamento a potenza) non verificano proprietà che nei calcoli si danno per scontate. A partire dalla proprietà associativa della somma.

Non ci credete? Quanto fa cento milioni di euro più trenta centesimi più trenta centesimi?

Il calcolo non sembra difficile neanche per i più inesperti e le più timorose. Abbiamo due strade per giungere al risultato, due modi per associare gli addendi in ballo: possiamo sommare dieci milioni e trenta centesimi ed il risultato parziale con i restanti trenta centesimi oppure più comodamente possiamo sommare i centesimi tra loro e poi sommare dieci milioni al parziale ottenuto.

In entrambi i casi il risultato totale è dieci milioni e sessanta centesimi.

$$
\begin{array}{ccc}
(100000000 + 0.30) + 0.30 & \rightarrow & 100000000 \\
\uparrow \quad \textit{primo modo} & & \\
100000000 + 0.30 + 0.30 & & 100000000.60 \\
\downarrow \quad \textit{secondo modo} & & \\
100000000 + (0.30 + 0.30) & \rightarrow & 100000001
\end{array}
$$

FIGURA 3. Comportamenti diversi

Ma se non siamo convinti del risultato prendiamo in mano il cellulare e scegliamo l'opzione calcolatrice. Il mio, prodotto nel paese delle renne, mi consente di scrivere numeri con al massimo nove cifre, proprio come 100000000.

Seguiamo il primo modo indicato per associare i numeri (vedi *Figura* 3): sommiamo 100000000 e 0.30 ed il parziale ottenuto nuovamente con 0.30. Il display dà come risultato 100000000. Direte voi, giustamente, non potendo visualizzare sul display numeri con dieci e più cifre come 10000000.60 la calcolatrice tronca il risultato alla nona cifra.

Seguiamo ora il secondo modo indicato *Figura* 3): sommiamo tra loro 0.30 e 0.30 e poi 100000000 con il parziale ottenuto. Il display magicamente o, forse, diabolicamente dà un risultato diverso: 100000001. Come prima il risultato è frutto di una necessaria approssimazione, ma la cosa spiazzante è che il totale cambia a seconda del modo con cui associamo gli addendi.

Ecco qui un'altra bella pecorella nera da un lato e con diverse tonalità di giallo dall'altro. Perché diverse tonalità? Dite che sto esagerando per una semplice associatività eversiva?

Beh, pensate ad un computer a 64 bit. La sua aritmetica è certamente più potente rispetto a quella di calcolatrici o cellulari, ma è comunque finita e riconosce solo quei numeri compresi tra -2^{-126} e 2^{127} la cui rappresentazione in sistema binario preveda l'ultimo 1 non più in là della cinquantatreesima cifre tra prima e dopo la virgola.[2]

[2]Ci riferiamo ala rappresentazione a virgola mobile, o `floating point`, perché è quella che permette di avere un range più ampio.
Per saperne di più su come un computer memorizza i dati numerici cfr., ad esempio, `http://www-dft.ts.infn.it/ pastore/DIDA/chim/app/aritmetica.html`.

Come ad esempio 738135070518808, che in binario si scrive

10100111110101010001110101010110010101110000110000

e che letto al contrario sulla mia Voesa sarebbe valso 'BOBBISOLO-SEIBEL'.

E gli altri numeri? Quelli al di fuori del range indicato non possono essere considerati, mentre quelli compresi nel range, ma la cui rappresentazione in sistema binario prevede qualche 1 dopo la cinquantatreesima cifra (tra prima e dopo la virgola) devono essere approssimati e, quindi, memorizzati con un certo errore.

E se consideriamo che un computer è in grado di eseguire milioni di operazioni al secondo e che alcuni programmi computazionali richiedono al computer di lavorare per ore, giorni o addirittura mesi prima di fornire una risposta, possiamo immaginare come un errore iniziale risibile possa amplificarsi a dismisura, se non controllato, ed inficiare l'intera computazione. Indipendentemente dalla correttezza del programma utilizzato.

Roba da far perdere il sonno agli specialisti di questo genere di problemi, gli analisti numerici, nuova specie di matematici che diffida persino delle proprietà elementari delle operazioni!

Tiriamo le somme

L'aritmetica non sembra poi quel mondo piatto e privo di sorprese che molte persone disegnano. Anche le cose apparentemente più semplici, come l'addizione, nascondono insidie.

In questa divagazione abbiamo visto che non c'è un modo naturale di definire l'operazione somma e che anche noi siamo abituati ad usarne diversi, uno se andiamo a fare la spesa, un altro se guardiamo l'orologio, un altro ancora se facciamo la conta per andare in porta. Tanti modi diversi usati, però, con la stessa naturalezza o con la stessa difficoltà.

Ma la cosa più sconvolgente scoperta è che i calcolatori elettronici inventati per risolverci i problemi di calcolo, possono complicarli o portarci lungo strade sbagliate perché affetti da aritmetica finita!

E se anche qualcosa vi è sfuggita su moduli, associatività eversive o memorizzazioni di numeri a virgola mobile, non importa così tanto.

Di una cosa sono però sicuro, la prossima volta che qualcuno vi dice che due più due fa sempre quattro sapete come metterlo KO.

TERZA DIVAGAZIONE

Euclide, l'orso e il cacciatore

il triangolo no, non l'avevo considerato,
d'accordo ci proverò,
la geometria non è un reato

da *Il triangolo*, Zerolandia (1978), cantata da R. Zero

Questa volta iniziamo con un indovinello che ha a che fare con cacciatori e non con matematici, fisici o ingegneri.

> Un cacciatore è in giro per una battuta di caccia. Dopo aver piantato la sua tenda si incammina verso sud alla ricerca di orsi. Cammina per un chilometro, non trova nulla ed allora decide di deviare verso est. Percorre un altro chilometro, ma ancora nulla. Si dirige verso nord. Dopo esattamente un chilometro si accorge di essere arrivato al punto di partenza da una direzione diversa. Proprio in quel momento vede un orso che sta frugando nella sua tenda e gli spara. Mancandolo.

La domanda è... di che colore è l'orso?

Bell'indovinello, ma la matematica cosa c'entra?

Dite la verità, vi aspettavate una domanda diversa, una domanda che avesse a che fare con i numeri, visto che è libro di divagazioni matematiche ed è difficile scrostare dalla testa della gente l'idea che la matematica abbia sempre a che fare con i numeri.

Invece l'indovinello vuole sapere di che colore è l'orso. E perché dovremmo essere in grado di stabilirlo con certezza?

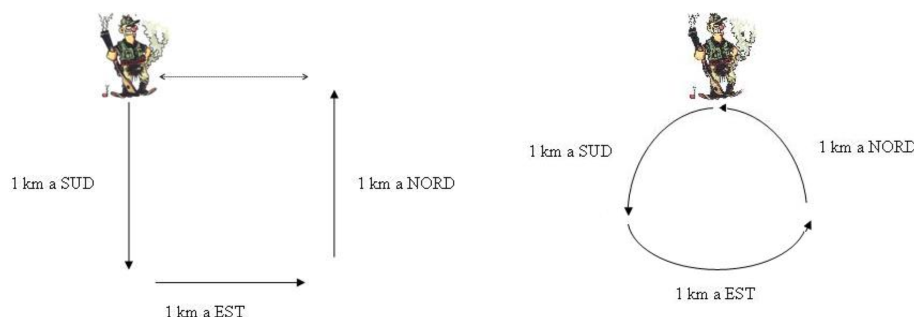


Figura 4. Il percorso del cacciatore

Beh, se l'indovinello è ben posto, la soluzione deve essere unica e deducibile dal testo: ci deve essere un solo punto sulla terra in cui la tenda può essere stata piantata. Rileggiamo allora l'indovinello e facciamo uno schema del percorso del cacciatore.

Il cacciatore si muove un chilometro verso sud, poi uno verso est ed uno verso nord. Un attimo... il cacciatore a questo punto si dovrebbe trovare un chilometro ad est del punto di partenza ed, invece, si trova esattamente al punto di partenza. Com'è possibile?

Il ragionamento di prima non fa una piega se siamo su di un piano, ma la nostra terra è sferica o, per meglio dire, può essere assimiliata ad una sfera se consideriamo spostamenti minimi rispetto alla sua circonferenza massima. Ed un chilometro lo è.

La chiave è proprio questa. Se la tenda fosse stata posta all'Equatore il cacciatore si sarebbe effettivamente ritrovato un chilometro ad est del punto di partenza. Posizionando la tenda sempre più su lungo i paralleli vediamo che la distanza tra punto di partenza e punto di arrivo diminuisce. Infine, se la tenda è posta al polo Nord punto di partenza e di arrivo coincidono (vedi *Figura* 4).

E l'orso? Non può che essere bianco perché al Polo ci sono solo orsi bianchi.

Indovinello risolto. Per risolverlo abbiamo usato un ragionamento di tipo geometrico: abbiamo costruito un triangolo su una sfera. Un triangolo equilatero, dato che nelle tre direzioni sud, est, nord il cacciatore percorre cammini di pari lunghezza. I suoi tre lati, inoltre, non sono sovrapposti visto che il cacciatore arriva al punto di partenza da una direzione diversa da quella che ha preso all'inizio.

Ma a ben guardare qualcosa di sospetto in questo triangolo c'è. I suoi tre angoli devono essere uguali perché un triangolo equilatero ha sempre tre angoli uguali. I primi due angoli sono sicuramente di 90° perché il cacciatore cambia prima direzione da sud ad est e poi da est a nord e, quindi, si volta di un angolo retto. Allora anche il terzo angolo misura 90° ! Eccola la cosa che non quadra: la somma degli angoli interni del triangolo descritto dal cacciatore è pari a tre angoli retti, cioé a 270° !

"Eppure giurerei di aver sentito a scuola un teorema che afferma che la somma degli angoli interni di un triangolo qualsiasi è 180°. Ma questa deve essere un'altra fandonia insegnata da insegnanti comunisti nella scuola pubblica che il nostro governo finalmente riformerà!"

Chi ricorda quel teorema ricorda bene l'enunciato, ma dimentica che a scuola si studia la geometria del piano, la cosiddetta geometria euclidea. Nella Seconda Divagazione abbiamo visto come non esista una sola aritmetica e come a volte non si possano dare per assodate neanche alcune proprietà basilari. In questa divagazione incontreremo una storica pecora che ci spiegherà perché esistono tante geometrie e non solo quella del piano.

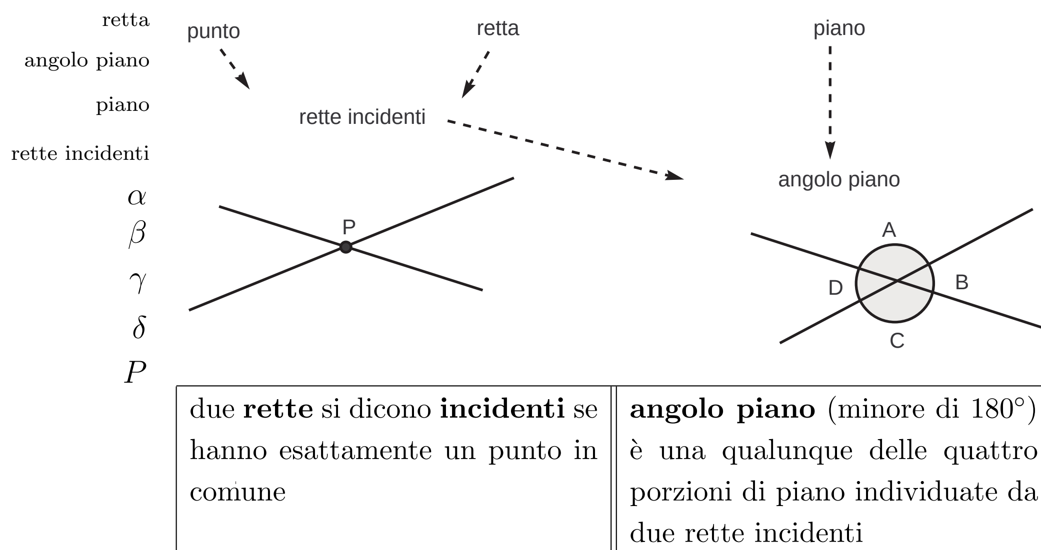
L'argomento trattato non è semplice, ma mio obiettivo è farvi cogliere un po' dello spirito e del funzionamento della geometria che si incontra a scuola, di quella che si incontra inconsapevolmente tutti i giorni e di quella che si incontra solo a volerla cercare.

Le regole del calcolo geometrico

La geometria (dal greco γεωμετρέω, *io misuro terreni*) è il settore della matematica che studia le figure, le curve, le superfici e le loro proprietà, quali la forma, la lunghezza, l'estensione. La geometria si interessa anche di come cambiano queste proprietà se figure, curve o superfici sono soggette, ad esempio, a traslazioni, rotazioni, ribaltamenti o deformazioni.

A scuola si studia quasi esclusivamente, la geometria euclidea, chiamata così in onore di Euclide, matematico greco del III sec. a.C. autore de *Gli Elementi*, il primo trattato di geometria a noi interamente pervenuto.

PSfrag replacements



due **rette** si dicono **incidenti** se hanno esattamente un punto in comune	**angolo piano** (minore di 180°) è una qualunque delle quattro porzioni di piano individuate da due rette incidenti

FIGURA 5. Enti primitivi ed enti derivati

Il connubio scuola-geometria fa venire in mente triangoli, quadrati e i famosi problemi... "Belli quelli delle scuole medie! Applicavi il teorema di Pitagora, le formule per determinare l'area e trovavi la soluzione! Incomprensibili, invece, quelli delle superiori! Chiedevano di dimostrare cose tanto strane che spesso non si riusciva neanche a fare il disegno!"

In effetti la differenza tra i problemi delle medie e quelli delle superiori sembra abissale. I calcoli aritmetici, assoluti protagonisti alle medie, alle superiori spariscono quasi completamente. Acquista, invece, importanza un calcolo di tipo diverso, un calcolo che richiede un modo più complesso di ragionare e la capacità di scegliere il giusto risultato da applicare o la giusta osservazione da fare, un calcolo che non opera sui numeri, ma su rette angoli e segmenti ed i cui risultati non si ottengono eseguendo operazioni aritmetiche, ma eseguendo deduzioni logiche. Ogni risultato in geometria euclidea si ottiene attraverso questo particolare modo di ragionare che, per semplicità, chiamerò calcolo geometrico. Vediamo a grandi linee come funziona.

Gli oggetti su cui il calcolo geometrico opera sono gli enti geometrici: punto, retta e piano sono enti fondamentali, tutti gli altri enti si chiamano derivati perché si possono definire combinando tra loro enti fondamentali e enti derivati precedentemente definiti. In *Figura* 5, ad esempio, l'ente derivato 'rette incidenti' è definito direttamente a

PSfrag replacements

Enunciato:

T è un triangolo equilatero;

T è un triangolo isoscele

per via diretta

per assurdo

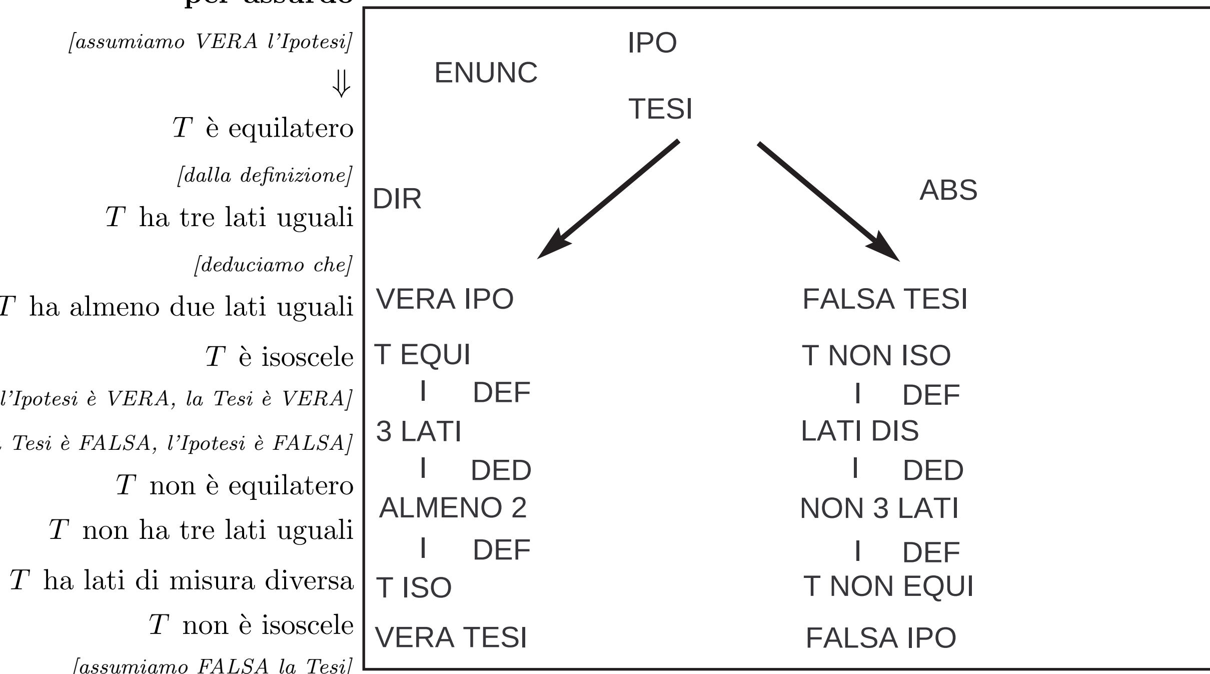


Figura 6. Dimostrazioni dell'enunciato: "Se T è un triangolo equilatero, allora T è un triangolo isoscele"

partire dagli enti fondamentali 'punto' e 'retta', mentre l'ente derivato 'angolo piano' [minore di 180°] è definito tramite l'ente fondamentale 'piano' e l'ente derivato 'rette incidenti'.[1]

Le proprietà degli enti fondamentali sono regolate dagli assiomi (dal greco ἀξιόω, *io ritengo conveniente*), affermazioni la cui validità è evidente di per sé, ma non è dimostrata.

Gli altri risultati possono essere ottenuti solo attraverso teoremi. Ciascun teorema ha un enunciato e una dimostrazione. Nell'enunciato si spiegano le ipotesi di partenza ed il risultato, la tesi, che si vuole ottenere. La dimostrazione è costituita da tutti i passaggi logici che collegano l'ipotesi con la tesi ed è la parte più importante di un teorema.

Ho usato la parola ibrida 'collegamento' perché ci sono due modi per collegare ipotesi e tesi di un enunciato.

La dimostrazione avviene per via diretta se si assume vera l'ipotesi e con deduzioni logiche si arriva a dimostrare la verità della tesi.

La dimostrazione avviene per assurdo se si assume come falsa la tesi e con deduzioni logiche si arriva a dimostrare la falsità dell'ipotesi.

[1] La definizione dell'ente derivato 'angolo piano' riportata in *Figura* 5 è modellata su quella data da [**Euclide, 2007**] pag.6, def.8

Il modo migliore per capire la differenza tra i due metodi è prendere un enunciato (possibilmente banale) e provare a dimostrarlo sia per via diretta che per assurdo, come fatto in *Figura* 6.

In confronto all'aritmetica, la geometria euclidea sembra avere regole ancora più certe ed induscutibili: partendo dagli assiomi, evidenti di per sé, si possono ricavare attraverso deduzioni logiche tutti i teoremi validi. Ma allora perché esistono più geometrie?

Storia di un postulato che non volle esser dimostrato

Quante volte, per sostenere un esame universitario, vi è capitato di studiare su libri, magari fotocopiati, scritti dal professore titolare dell'esame stesso?

E' strano pensarlo, ma *Gli Elementi* sono nati in circostanze simili: Euclide si dedicò alla loro stesura per fornire ai suoi studenti del Museo di Alessandria un manuale introduttivo di geometria. Circostanze simili, non identiche visto che ai suoi tempi i libri erano scritti a mano ed i docenti non potevano stringere amicizie con gli editori.

Data la funzione prevalentemente didattica, Euclide voleva che ogni risultato enunciato ne *Gli Elementi* fosse anche dimostrato e che i passaggi logici in ogni dimostrazione fossero conseguenza di risultati già precedentemente dimostrati. Il matematico greco sapeva dalla lezione aristotelica che non poteva dimostrare tutto e che era necessario assumere a monte la validità di alcuni principi. Principi che andavano divisi in nozioni comuni (in greco, κοιναὶ ἔννοιαι), ossia proposizioni non dimostrabili che enunciavano delle verità comuni a tutte le scienze, e postulati (in greco, αἰτήματα), ossia proposizioni necessarie ai fini del discorso che si stava per affrontare, ma di cui non si dava una dimostrazione.[2]

Egli inserì quattro nozioni comuni ed i seguenti cinque postulati:

I. Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una [sola] retta
II. Si può prolungare un segmento di linea retta indefinitamente in linea retta
III. Si può descrivere un cerchio con qualsisi punto come centro e qualsiasi lunghezza come raggio

[2]cfr. [**Aristotele, 2003**] **72 b** 5–**76 b** 34, [**Euclide, 2007**] pag. 7

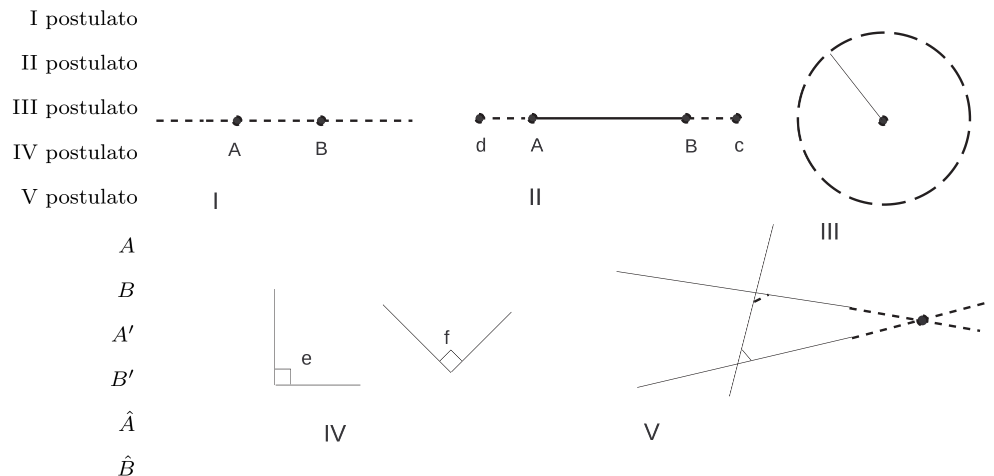


FIGURA 7. I cinque postulati di Euclide

IV. Tutti gli angoli retti sono uguali
V. Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due retti

Basta solo uno sguardo per notare tra i primi quattro postulati ed il V una grande differenza (vedi *Figura* 7).

I primi quattro postulati sono semplici da capire. I, III e IV stabiliscono regole fondamentali: una geometria senza la possibilità di tracciare linee rette o circonferenze o in cui due angoli retti non sono uguali sembra davvero improponibile. Il II postulato stabilisce a priori che i segmenti si possono prolungare indefinitamente lungo una retta e che quindi le rette hanno un'estensione illimitata. Anche il V postulato stabilisce a priori una proprietà delle rette, ma questa proprietà è non banale visto che spiega cosa accade quando tre(!) rette si incontrano.

In effetti, allo stesso Euclide il V postulato non piaceva, ma si era convinto ad inserirlo perché non era riuscito a dedurlo dagli altri quattro. Poco male. Senonché...

Gli Elementi ebbero sin da subito una diffusione che andava al di là delle aspettative dello stesso autore e divennero un modello da seguire, un classico da studiare e quasi da venerare. I fondamenti della geometria, così ben descritti nell'opera euclidea, non erano messi in discussione, compreso quel V postulato che stonava un po' con il resto.

A distanza di venti secoli i matematici si rifiutavano ancora di scendere dal treno e preferivano pensare che la parte nascosta della pecora V postulato era nera come quella visibile. Senza controllare. Finché non arrivò Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), matematico e gesuita, che scese dal treno... di notte. E si sa, di notte tutte le pecore e vacche sono interamente nere![3]

Saccheri, ai cui occhi *Gli Elementi* apparivano come una Bibbia della geometria ed il V postulato come una macchia su una delle prime pagine di questa Bibbia, decise di farla finita con questa onta per Euclide e si dedicò anima e corpo al problema del V postulato.

Nel 1733 uscì l'opera dal titolo altisonante *Euclides ab omni nævo vindicatus*, ovvero *Euclide riscattato da ogni difetto*. Saccheri era convinto di aver dimostrato per assurdo che il V postulato è conseguenza degli altri quattro. Ahilui, la dimostrazione era sbagliata, ma proprio questo suo sbaglio gli ha aperto le porte dell'immortalità matematica! Vediamo perché.

Saccheri provò a dimostrare che se il V postulato è falso, allora almeno uno degli altri quattro postulati è falso.

Nel corso della dimostrazione arrivò ad un trivio che, per semplicità, presentiamo così:

(A) La somma degli angoli interni di un triangolo è sempre 180°

(B) La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 180°

(C) La somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 180°

Triangoli, angoli e gradi. Eccoli che ritornano!

Abbiamo già ricordato nel primo paragrafo il teorema studiato a scuola che afferma che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre 180°. L'ipotesi (A) coincide, quindi, con la geometria euclidea. Obiettivo di Saccheri era pertanto dimostrare che se l'ipotesi (B) o l'ipotesi (C) erano vere, allora era falso uno dei primi quattro postulati.

Saccheri in effetti mostrò che, supporre vera l'ipotesi (B) contraddiceva il II postulato: in una geometria in cui la somma interna degli angoli di un triangolo supera i 180° e può essere, ad esempio, 270°, un segmento non si può prolungare indefinitamente e, quindi, tutte le linee rette hanno un'estensione finita.

[3]Hegel Fenomenologia dello spirito

Ma un attimo... la somma degli angoli interni del triangolo descritto intorno al polo Nord dal cacciatore in *Figura* 4 è proprio $270°$!

E cosa accade se le rette hanno un'estensione finita? Accade che, partendo da un punto e muovendosi sempre lungo una direzione prefissata, cioè lungo una specifica retta passante per quel punto, si ripassa necessariamnente da un punto da cui si è già passati (altrimenti la retta scelta avrebbe un'estensione non finita). Quello che, con buona approssimazione, succede sulla Terra se ci muoviamo lungo l'equatore o lungo un qualsiasi meridiano!

Felice del risultato parziale ottenuto, il matematico Saccheri non si era accorto del piccolo passo che lo avrebbe condotto a scoprire per primo la geometria della sfera! Felice di aver parzialmente riscattato dall'onta la Bibbia euclidea, il gesuita Saccheri non si era accorto che la Terra su cui poggiava i piedi non rispettava tutti e cinque i postulati!

A questo punto non rimaneva che occuparsi dell'ipotesi `(C)`. Ma il buon Saccheri non riuscì a dedurre dall'assunzione di questa ipotesi nessuna contraddizione logica ai primi quattro postulati. Al contrario, i suoi ragionamenti sfociavano in una serie di risultati non intuitivi. Poco convinto della palude in cui era finito, il matematico italiano chiosò con la frase: "[L'ipotesi `(C)`] è assolutamente falsa, poiché ripugna alla natura della linea retta." Saccheri era incorso in una petitio principii, una fallacia di presunzione: stava implicitamente assumendo che la retta per natura non poteva verificare i risultati che aveva lui stesso dedotto! [4]

La cieca volontà di non mettere in discussione il V postulato, la percezione della geometria euclidea come atto di fede e non come teoria scientifica impedirono a Saccheri di comprendere la potenza innovativa dei risultati ottenuti.

Un secolo più tardi János Bolyai (1802-1860) e Nikolaj Lobačevskij (1792-1856) non ripeterono lo stesso errore. Scesi dal treno, ma di giorno, girarono intorno alla pecora V postulato da lati diversi e scoprirono, quasi contemporaneamente, due gialli esempi di geometrie in cui il V postulato non vale. Dopo duemila anni di immobilità erano nate le geometrie non euclidee ed era iniziato un processo irreversibile di ridefinizione del concetto stesso di geometria.

[4] cfr. `http://it.wikipedia.org/wiki/Classificazione_delle_fallacie`

A distanza di soli venti anni Bernhard Riemann (1826-1866) introdusse quella che oggi è nota come geometria riemanniana, che spiega che ogni superficie ha una propria geometria intrinseca e che la geometria euclidea del piano o la geometria non euclidea della sfera sono solo casi particolari.

E nella dissertazione *Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, pronunciata nel 1854 all'Università di Göttingen, lo stesso Riemann suggerì che in futuro "la geometria non [avrebbe dovuto] trattare o di punti o di rette o di spazio nel senso ordinario, ma di insiemi di ennuple ordinate che vengono raggruppate secondo certe regole".[5]

La geometria aveva definitivamente compiuto il salto dalla monoliticità euclidea alla poliedricità che Saccheri aveva allo stesso tempo scoperto e negato.

Per due divagazioni passa un gregge di pecore

Prima l'aritmetica, poi la geometria. La matematica che sembrava a prima vista un tranquillo gregge di pecorelle monocolore su cui i pastori del numero hanno potere assoluto, si rivela a poco a poco un mondo niente affatto banale e, per questo, pieno di attrattive. A seconda dei gusti.

Meno male che non tutti i pastori sono uguali. Alla fine è solo questione di tempo e tutte le pecore che sono gialle da un lato verranno scoperte.

Oppure no?

[5][**Boyer, 2000**], pag. 625. Una ennupla ordinata è una sequenza di n numeri reali in cui conta l'ordine: $(1;2)$ è una coppia ordinata $[n = 2]$, $(2;1)$ è una coppia distinta da $(1;2)$ perché l'ordine conta, $(1;2;3)$ è una terna ordinata $[n = 3]$ e così via. Per chi ha qualche reminiscenza scolastica, il piano cartesiano è proprio l'insieme delle coppie ordinate. E per chi ricorda l'Introdivagazione, il cinghiale con due ali era stato associato alla coppia ordinata $(1;2)$.

Bibliografia

[Aristotele, 2003] Aristotele (2003). Organon. Adelphi; in italiano, testo a cura di G. Colli.

[Boyer, 2000] Boyer, C. B. (2000). Storia della matematica. Mondadori; Tradotto dall'inglese *A History of Mathematics* (1968).

[Devlin, 2002] Devlin, K. (2002). Il gene della matematica. Mondolibri; Tradotto dall'inglese *The Math Gene* (2000).

[Euclide, 2007] Euclide (2007). Euclid's Elements of Geometry. Disponibile all'indizzo `http://farside.ph.utexas.edu/euclid/Elements.pdf`; Testo greco edito da J.L. Heidelberg (1883-1885) con traduzione inglese a fronte di R. Fitzpatrick.

[Wells, 2002] Wells, D. (2002). Personaggi e paradossi della matematica. Mondadori, Oscar Saggi Scienza; Tradotto dall'inglese *The Penguin Book of Curious and Interesting Mathematics* (1997).